Disequazioni

Appunti di Matematica

Massimo Pasquetto

I.T.S. “Cangrande della Scala” – Verona

26 aprile 2020

1 Disuguaglianze numeriche

L’insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un insieme ordinato, cioè un insieme sul quale è possibile definire una relazione d’ordine. Dati due numeri reali a e b, si dice che $a < b$ se e solo se $b - a$ è positivo.

Esistono diverse relazioni d’ordine nell’insieme $\mathbb{R}$:

$<$ minore
$\leqslant$ minore o uguale
$>$ maggiore
$\geqslant$ maggiore o uguale

Proprietà delle disuguaglianze

(a) Se $a < b$ allora $a + c < b + c$ e $a - c < b - c$, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Se $a < b$ e $c > 0$ allora $a \cdot c < b \cdot c$ e $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $c \in \mathbb{R}^+$.

(c) Se $a < b$ e $c < 0$ allora $a \cdot c > b \cdot c$ e $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $c \in \mathbb{R}^-$.

(d) Siano a e b non nulli e concordi; se $a < b$, allora $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

(e) Siano a e b due numeri non negativi e n un numero naturale; se $a < b$ allora $a^n < b^n$.

2 Disequazioni

Consideriamo la seguente disuguaglianza tra due espressioni letterali

$$x + 5 < 3 \tag{1}$$

La disuguaglianza è vera per alcuni valori attribuiti alla lettera x, per esempio il numero -3, sostituito alla x verifica la disuguaglianza; mentre il numero $\frac{1}{2}$ non la verifica.

DISEQUAZIONE (in una variabile)

Una disequazione in una variabile è una disuguaglianza tra due espressioni letterali contenenti una lettera detta incognita (di solito x), verificata per un sottoinsieme di numeri che sostituiti all’incognita verificano la disuguaglianza stesa.

Risolvere una disequazione significa determinare tutti i numeri che sostituiti alla x, nella disequazione, la rendono una disugualglianza vera.

È importante specificare l’insieme in cui si risolve la disequazione, per esempio la disequazione 1 ammette soluzioni nell’insieme $\mathbb{R}$ ma non ha soluzioni nell’insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Se non ulteriormente specificato si intende che l’insieme di risoluzione della disequazione è l’insieme dei numeri reali.

La risoluzione di una disequazione si deve concludere con la descrizione delle soluzioni. L’insieme delle soluzioni può essere rappresentato in forma algebrica, in forma insiemistica o in forma grafica.

3 Intervalli

Alcuni particolari sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ sono detti intervalli.

Un intervallo è l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra due valori a e b che possono essere finiti o onfiniti. Se i due valori a e b sono entrambi finiti, allora il valore minore si chiama estremo sinistro o estremo inferiore e il valore maggiore si chiama estremo destro o estremo superiore dell'intervallo.

Un intervallo di numeri reali si dice

- **illimitato inferiormente** se è costituito da tutti i numeri che precedono un certo numero;
- **illimitato superiormente** se è costituito da tutti i numeri che seguono un certo numero;
- **limitato** se è costituito da tutti i numeri compresi tra due numeri detti estremi dell'intervallo;
- **chiuso** se gli estremi sono compresi;
- **aperto** se gli estremi non sono compresi.

Ogni intervallo può essere descritto in vari modi: rappresentazione algebrica, rappresentazione grafica, rappresentazione insiemistica.

Intervallo (limitato) chiuso. È l'insieme di tutti i valori compresi tra due estremi a e b, **compresi** gli estremi.
Rappresentazione algebrica: $a \leqslant x \leqslant b$
Rappresentazione insiemistica: $[a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
Rappresentazione grafica: figura 1.

Intervallo (limitato) aperto. È l'insieme di tutti i valori compresi tra due estremi a e b, **esclusi** gli estremi
Rappresentazione algebrica: $a < x < b$
Rappresentazione insiemistica: $]a,\, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Rappresentazione grafica: figura 2.

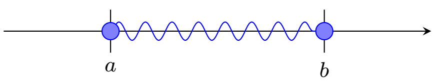


Figura 1 – Intervallo limitato chiuso

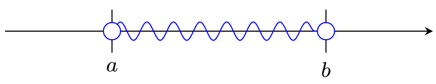


Figura 2 – Intervallo limitato aperto

Intervallo chiuso superiormente illimitato. È l'insieme di tutti i valori maggiori di un valore a, **compreso** l'estremo a.
Rappresentazione algebrica: $x \geqslant a$
Rappresentazione insiemistica: $[a,\, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$
Rappresentazione grafica: figura 3.

Intervallo aperto superiormente illimitato. È l'insieme di tutti i valori maggiori di un valore a, **escluso** l'estremo a.
Rappresentazione algebrica: $x > a$
Rappresentazione insiemistica: $]a,\, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
Rappresentazione grafica: figura 4.

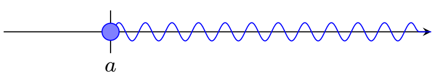


Figura 3 – Intervallo chiuso superiormente illimitato

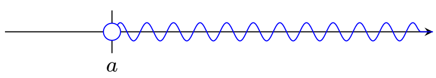


Figura 4 – Intervallo aperto superiormente illimitato

Intervallo chiuso inferiormente illimitato. È l'insieme di tutti i valori minori di un valore b, **compreso** l'estremo b.
Rappresentazione algebrica: $x \leqslant b$
Rappresentazione insiemistica: $]-\infty,\, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
Rappresentazione grafica: figura 5.

Intervallo aperto inferiormente illimitato. È l'insieme di tutti i valori minori di un valore b, **escluso** l'estremo b.
Rappresentazione algebrica: $x < b$

Rappresentazione insiemistica: $]-\infty,\, b[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
Rappresentazione grafica: figura 6.

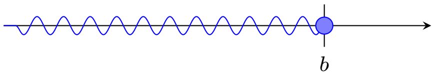


Figura 5 – Intervallo chiuso inferiormente illimitato

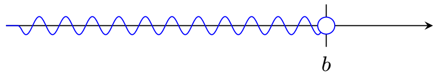


Figura 6 – Intervallo aperto inferiormente illimitato

Alcuni intervalli particolari.

Intervallo chiuso a sinistra. È l'insieme di tutti i compresi tra a e b, **compreso** l'estremo a ed **escluso** b.
Rappresentazione algebrica: $a \leqslant x < b$
Rappresentazione insiemistica: $[a,\, b[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
Rappresentazione grafica: figura 7.

Intervallo chiuso a destra. È l'insieme di tutti i compresi tra a e b, **escluso** l'estremo a ed **incluso** b.
Rappresentazione algebrica: $a < x \leqslant b$
Rappresentazione insiemistica: $]a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
Rappresentazione grafica: figura 8.

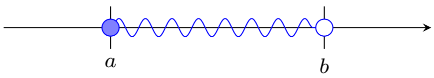


Figura 7 – Intervallo chiuso a sinistra

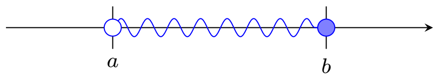


Figura 8 – Intervallo chiuso a destra

Insieme singoletto (un solo punto). È l'insieme che contiene il solo valore a.
Rappresentazione algebrica: $x = a$
Rappresentazione insiemistica:
$\{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a\}$
Rappresentazione grafica: figura 9.

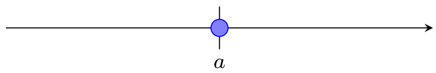


Figura 9 – Insieme singoletto (un punto)

Retta reale. È l'insieme di tutti i numeri reali. Può essere considerato come un intervallo illimitato sia inferiormente che superiormente.
Rappresentazione algebrica: $\forall x \in \mathbb{R}$
Rappresentazione insiemistica: $]-\infty,\, +\infty[\, = \mathbb{R}$
Rappresentazione grafica: figura 10.

Intervallo vuoto. È l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non contiene alcun numero.
Rappresentazione algebrica: $\nexists x \in \mathbb{R}$
Rappresentazione insiemistica: $\emptyset = \{\}$
Rappresentazione grafica: figura 11.

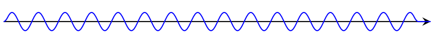


Figura 10 – Retta reale

Figura 11 – Insieme vuoto

4 Disequazioni intere di primo grado – esercizi

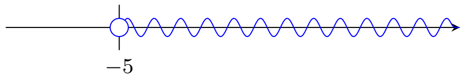
Esercizio. Risolvere la disequazione $-3x-15<0$

$-3x-15<0$ portare il termine noto a destra, cambiando il segno

$-3x<15$ cambiare i segni e il verso della disequazione

$3x>-15$ dividere ambo i membri per il coefficiente di x

$x>-5$ soluzione della disequazione



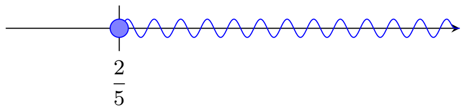
Intervallo aperto superiormente illimitato.
$S=\left]-5,\,+\infty\right[=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-5\}$

Esercizio. Risolvere la disequazione $5x-2\geqslant 0$

$5x-2\geqslant 0$ portare il termine noto a destra, cambiando il segno

$5x\geqslant 2$ dividere ambo i membri per il coefficiente di x

$x\geqslant \frac{2}{5}$ soluzione della disequazione



Intervallo chiuso superiormente illimitato.
$S=\left[\frac{2}{5},\,+\infty\right[=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\geqslant\frac{2}{5}\right\}$

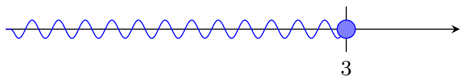
Esercizio. Risolvere la disequazione $-2x+6\geqslant 0$

$-2x+6\geqslant 0$ portare il termine noto a destra, cambiando il segno

$-2x\geqslant -6$ cambiare i segni e il verso della disequazione

$2x\leqslant 6$ dividere ambo i membri per il coefficiente di x

$x\leqslant 3$ soluzione della disequazione



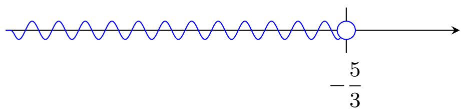
Intervallo chiuso inferiormente illimitato.
$S=\left]-\infty,\,3\right]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant 3\}$

Esercizio. Risolvere la disequazione $3x+5<0$

$3x+5<0$ portare il termine noto a destra, cambiando il segno

$3x<-5$ dividere ambo i membri per il coefficiente di x

$x<-\frac{5}{3}$ soluzione della disequazione



Intervallo aperto inferiormente illimitato.
$S=\left]-\infty,\,-\frac{5}{3}\right[=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x<-\frac{5}{3}\right\}$

Risolvere i seguenti esercizi

1. $-9x-7\geqslant 0$

2. $2x-8<0$

3. $3-4x\leqslant 0$

4. $-3x+12>0$

5. $2x+\frac{1}{2}\geqslant 0$

6. $2(x-1)-3(x+1)<1$

7. $(x+2)^2-7x\geqslant x(x-2)$

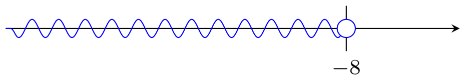
8. $\frac{x-1}{3}>\frac{2x+1}{5}$

9. $\frac{x+4}{2}-\frac{x-3}{6}\leqslant\frac{x+1}{3}$

10. $2\left(x-\frac{1}{2}\right)<(x+1)^2-x^2$

Esercizio. Risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{3} > \dfrac{2x+1}{5}$

$\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{2x+1}{5} > 0$	portare tutti i termini a sinistra di $>$
$\dfrac{5\,(x-1) - 3\,(2x+1)}{15} > 0$	denominatore comune
$5x - 5 - 6x - 3 > 0$	semplificare il denominatore
$-x - 8 > 0$	sommare i monomi simili e scrivere il polinomio in ordine
$-x > 8$	portare il termine noto a destra
$x < -8$	cambiare i segni e il verso della disequazione
$x < -8$	soluzione della disequazione



Intervallo aperto inferiormente illimitato.
$S =]-\infty,\, -8[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -8\}$

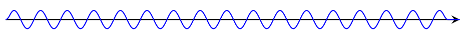
Esercizio. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+4}{2} - \dfrac{x-3}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{3}$

$\dfrac{x+4}{2} - \dfrac{x-3}{6} - \dfrac{x+1}{3} \leqslant 0$	portare tutti i termini a sinistra
$\dfrac{3(x+4) - 1(x-3) - 2(x+1)}{6} \leqslant 0$	denominatore comune
$3x + 12 - x + 3 - 2x - 2 \leqslant 0$	semplificare il denominatore
$0x + 13 \leqslant 0$	sommare i monomi simili e scrivere il polinomio in ordine
$0x \leqslant -13$	portare il termine noto a destra
$\nexists x \in \mathbb{R}$	la disequazione è IMPOSSIBILE

Insieme vuoto. $S = \emptyset = \{\}$

Esercizio. Risolvere la disequazione $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < (x+1)^2 - x^2$

$2\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - (x+1)^2 + x^2 < 0$	portare tutti i termini a sinistra
$2x - 1 - x^2 - 2x - 1 - x^2 < 0$	eseguire le moltiplicazioni
$0x - 2 < 0$	sommare i monomi simili e scrivere il polinomio in ordine
$0x < 2$	portare il termine noto a destra
$\forall x \in \mathbb{R}$	la disequazione è verificata per ogni numero reale



Retta reale. $S =]-\infty,\, +\infty[= \mathbb{R}$

5 Sistemi di disequazioni

Risolvere un sistema di disequazioni significa determinare l'intersezione tra le soluzioni di ogni disequazione del sistema. Un sistema di disequazioni si scrive utilizzando la parentesi graffa come simbolo di sistema.

Per esempio supponiamo di voler trovare tutte le soluzioni comuni alle disequazioni $x - 2 \leqslant 3$, $5x + 15 > 0$ e $2x < 18$, allora scriviamo

$$\begin{cases} x - 2 \leqslant 3 \\ 5x + 15 > 0 \\ 2x < 18 \end{cases}$$

Se indichiamo con S_1, S_2 e S_3 le soluzioni rispettivamente della prima disequazione, della seconda e della terza, allora la soluzione del sistema è data dall'intersezione delle soluzioni

$$S = \mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 \cap \mathrm{S}_3$$

Pertanto prima si risolvono separatamente le tre disequazioni del sistema per determinare le soluzioni di ognuna.

Prima disequazione	Seconda disequazione	Terza disequazione
$x - 2 \leqslant 3$	$5x + 15 > 0$	$2x < 18$
$x \leqslant 5$	$x > -3$	$x < 9$
$\mathrm{S}_1 =]-\infty,\, 5]$	$\mathrm{S}_2 =]-3,\, +\infty[$	$\mathrm{S}_3 =]-\infty,\, 9[$

Infine si costruisce una tabella con la rappresentazione grafica di ogni intervallo soluzione delle singole disequazioni e si determina graficamente l'intervallo soluzione S in cui sono verificate tutte le disequazioni del sistema, figura 12.

Si tracciano tante linee orizzontali quante sono le disequazioni +1 per le soluzioni e tante linee verticali quanti sono i valori da rappresentare.
Sulle linee verticali si indicano i valori che servono per rappresentare gli intervalli **in ordine crescente**.
Su ogni linea orizzontale si mette l'etichetta delle soluzioni della disequazione corrispondente e si rappresenta graficamente l'intervallo.
Si individuano le soluzioni comuni e si rappresentano nell'ultima linea orizzontale, facendo molta attenzione agli estremi se sono aperti o chiusi

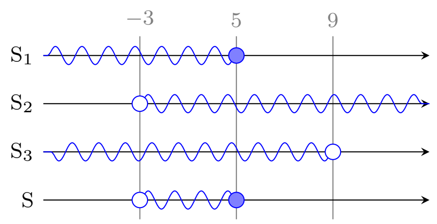


Figura 12 – Soluzione grafica di un sistema

La soluzione del sistema è

$$-3 < x \leqslant 5$$

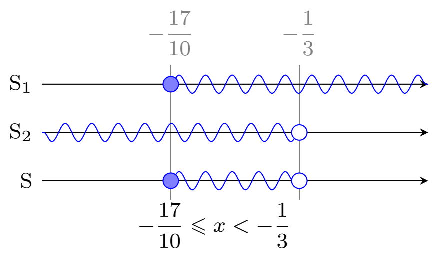
un intervallo limitato chiuso a destra, $S =]-3,\, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 5\}$

Esercizio. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 3(1 - x) \leqslant 4(5 + 2x) - x \\ 2(3x + 1) < 0 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema

I disequazione	II disequazione
$3(1 - x) \leqslant 4(5 + 2x) - x$	$2(3x + 1) < 0$
$3 - 3x - 20 - 8x + x \leqslant 0$	$6x + 2 < 0$
$-10x \leqslant 17$	$6x < -2$
$10x \geqslant -17$	$x < -\dfrac{1}{3}$
$x \geqslant -\dfrac{17}{10}$	
$\mathrm{S}_1 = \left[-\dfrac{17}{10},\, +\infty\right[$	$\mathrm{S}_2 = \left]-\infty,\, -\dfrac{1}{3}\right[$



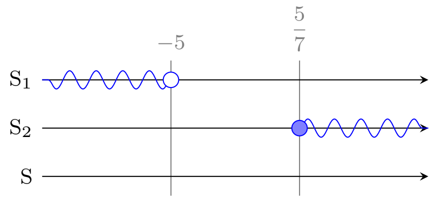
La soluzione è un intervallo chiuso a sinistra $\mathrm{S} = \left[-\dfrac{17}{10},\, -\dfrac{1}{3}\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\dfrac{17}{10} \leqslant x < -\dfrac{1}{3}\right\}$

Esercizio. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x(x+1)-(x+5)(x-5)<0 \\ 4x-\dfrac{x+3}{2}\geqslant 1 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema

I disequazione	II disequazione
$x(x+1)-(x+5)(x-5)<0$	$4x-\dfrac{x+3}{2}\geqslant 1$
$x^2+x-x^2+5<0$	$8x-x-3-2\geqslant 0$
$x<-5$	$x\geqslant \dfrac{5}{7}$
$S_1=]-\infty,\,-5[$	$S_2=\left[\dfrac{5}{7},\,+\infty\right[$



Sistema **impossibile**

6 Disequazioni e prodotto di fattori

Disequazioni riconducibili allo studio del segno di fattori.

Alcune particolari disequazioni si possono risolvere analizzando il segno di ogni singolo fattore. Supponiamo di dover risolvere una disequazione scritta come prodotto di due o più fattori e nella quale ci sia il numero 0 a destra del simbolo di disuguaglianza, per esempio

$$P_1(x)\cdot P_2(x)<0$$

Il prodotto dei due polinomi è negativo per quei valori di x che rendono i due polinomi discordi (segno opposto), pertanto per risolvere la disequazione si devono studiare i segni dei singoli fattori. Pertanto si procede nel seguente modo:

1. si studia il segno di ogni singolo fattore ponendoli separatamente **maggiori o uguali** o **maggiori** di 0 a seconda che nell'esercizio siano accettabili o no i valori che **annullano** i singoli fattori;

2. si compila una tabella con i segni dei singoli fattori, riportando sia gli intervalli in cui i fattori sono positivi sia quelli in cui sono negativi ponendo attenzione agli estremi degli intervalli se sono aperti o chiusi;

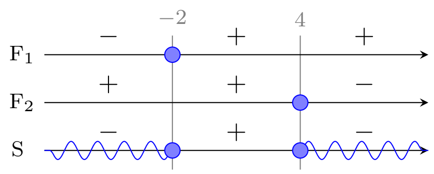
3. si riporta nell'ultima riga della tabella il prodotto dei singoli segni ottenendo in questo modo il segno del prodotto e si evidenziano come soluzioni gli intervalli con i segni richiesti nel testo dell'esercizio

   - se nel testo dell'esercizio c'è >0 o $\geqslant 0$ si evidenziano gli intervalli con il segno $+$;

   - se nel testo dell'esercizio c'è <0 o $\leqslant 0$ si evidenziano gli intervalli con il segno $-$;

Esercizio. Risolvere la disequazione $(x+2)(4-x)\leqslant 0$

segno di F_1	segno di F_2
$x+2\geqslant 0$	$4-x\geqslant 0$
$x\geqslant -2$	$-x\geqslant -4$
	$x\leqslant 4$

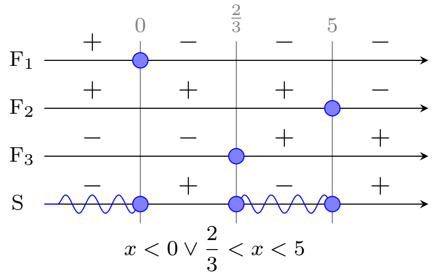


$x\leqslant -2\vee x\geqslant 4$

La soluzione è l'unione di due intervalli chiusi illimitati $S=]-\infty,\,-2]\cup[4,\,+\infty[=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x\leqslant -2\vee x\geqslant 4\right\}$

Esercizio. Risolvere la disequazione $-x(5-x)(3x-2)<0$

segno di F_1	segno di F_2	segno di F_3
$-x > 0$	$5 - x > 0$	$3x - 2 > 0$
$x < 0$	$x < 5$	$x > \dfrac{2}{3}$



La soluzione è l'unione di intervalli $S = \left]-\infty,\, 0\right[\cup \left]\dfrac{2}{3},\, 5\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < 0 \vee \dfrac{2}{3} < x < 5\right\}$

Riferimenti bibliografici

[1] Massimo Bergamini, Graziella Barozzi (2014). *Matematica multimediale.verde 1*, Zanichelli Editore, Bologna