Equazioni
Appunti di Matematica

Massimo Pasquetto
I.T.S. "Cangrande della Scala" – Verona

26 aprile 2020

1 Equazioni di grado superiore al secondo

1.1 Equazioni binomie

Un'equazione si dice binomia se è possibile scriverla nella forma

$$ax^n + b = 0$$

dove a e b sono numeri reali con $a \neq 0$ e n è un numero naturale non nullo. Il numero n indica il grado dell'equazione.

Per risolvere un'equazione binomia si deve prima riscriverla nella forma $x^n = -\frac{b}{a}$, poi bisogna distinguere due casi:

- se n è pari, l'equazione ha due soluzioni $x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ oppure è impossibile
- se n è dispari l'equazione ha una soluzione $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

1.2 Equazioni trinomie

Un'equazione si dice trinomia se è possibile scriverla nella forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali con $a \neq 0$ e n è un numero naturale non nullo. Il numero $2n$ indica il grado dell'equazione.

ESEMPIO

Risolvere l'equazione $5x^4 - 14x^2 - 3 = 0$.

$5x^4 - 14x^2 - 3 = 0$	equazione trinomia di IV grado
$x^2 = t$	sostituzione
$5t^2 - 14t - 3 = 0$	equazione di II grado nella variabile t
$t = \frac{7 \pm \sqrt{64}}{5} = \frac{7 \pm 8}{5}$	
$t = 3 \vee t = -\frac{1}{5}$	soluzioni dell'equazione nella variabile t
$x^2 = 3 \vee x^2 = -\frac{1}{5}$	torniamo alla variabile x, la seconda equazione è impossibile
$x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$	

Le soluzioni dell'equazione sono $x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$.

1.3 Equazioni risolubili con scomposizioni in fattori

Si consideri l'equazione

$$f(x) \cdot g(x) = 0$$

allora, applicando la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni si trovano unendo le soluzioni delle due equazioni

$$f(x) = 0 \quad \vee \quad g(x) = 0$$

per risolvere l'equazione $\mathrm{P}(x) = 0$, dove $\mathrm{P}(x)$ è un polinomio nella variabile x, procedere in questo modo:

(a) scomporre il polinomio $\mathrm{P}(x)$ nel prodotto di due o più polinomi, per esempio $\mathrm{Q}_1(x) \cdot \mathrm{Q}_2(x)$

(b) riscrivere l'equazione nella forma $\mathrm{Q}_1(x) \cdot \mathrm{Q}_2(x) = 0$

(c) risolvere le due equazioni $\mathrm{Q}_1(x) = 0$ e $\mathrm{Q}_2(x) = 0$ e unire le soluzioni delle due equazioni

ESEMPIO

Risolvere l'equazione $6x^4 + 3x^2 = 6x^3 + 3x$.

$6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x = 0$ riscrivere l'equazione nella **forma normale** $\mathrm{P}(x) = 0$

$3x\left(2x^3 - 2x^2 + x - 1\right) = 0$ raccoglimento totale

$3x\left[2x^2(x-1) + 1(x-1)\right] = 0$ raccoglimento parziale

$3x(x-1)\left(2x^2+1\right) = 0$ raccoglimento totale

$3x = 0 \vee (x-1) = 0 \vee \left(2x^2+1\right) = 0$ legge di annullamento del prodotto

$x = 0 \vee x = 1 \vee x^2 = -\dfrac{1}{2}$ la terza equazione è impossibile

Le soluzioni dell'equazione sono $x = 0 \vee x = 1$.

1.4 Equazioni risolubili con la regola di Ruffini

Teorema di Ruffini

Un polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per $(x-a)$ se e solo se $\mathrm{P}(a) = 0$.

Si chiamano **zeri del polinomio** $\mathrm{P}(x)$ i numeri a tali che $\mathrm{P}(a) = 0$.

Se $\mathrm{P}(x)$ è un polinomio a coefficienti interi, allora gli zeri interi del polinomio sono da ricercare tra i divisori del termine noto del polinomio; mentre gli zeri razionali sono da ricercare tra le frazioni che hanno al numeratore un divisore del termine noto e al denominatore un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

Supponiamo di dovere risolvere l'equazione

$$\mathrm{P}(x) = 0$$

utilizzando il metodo di Ruffini.

Allora è necessario procedere nel seguente modo:

1. cercare uno zero razionale del polinomio $\mathrm{P}(x)$, supponiamo che sia a;
2. dividere il polinomio $\mathrm{P}(x)$ per $(x-a)$ con la regola di Ruffini, in modo da ottenere un polinomio quoziente $\mathrm{Q}(x)$ e resto 0;
3. riscrivere l'equazione nella forma $(x-a) \cdot Q(x) = 0$

ESEMPIO

Risolvere l'equazione $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$.

Scomponiamo in fattori il polinomio $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ con il metodo di Ruffini, cercando uno zero dell'equazione nell'insieme dei divisori di 24 che sono $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$.

$P(1) = 1 + 5 - 2 - 24 = -20 \neq 0$

$P(-1) = -1 + 5 + 2 - 24 = -18 \neq 0$

$P(2) = 8 + 20 - 4 - 24 = 0$ 2 è una soluzione dell'equazione

Il polinonio $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ è divisibile per $x - 2$, applicado la regola di Ruffini, figura 2, otteniamo la seguente scomposizione

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = (x-2)(x^2 + 7x + 12)$$

	1	5	−2	−24
2		2	14	24
	1	7	12	0

Figura 1 – Es. pag. 710 n. 444

L'equazione si può riscrivere nella forma

$(x-2)(x^2 + 7x + 12) = 0$

$x - 2 = 0 \vee x^2 + 7x + 12 = 0$

$x = 2 \vee x = \dfrac{-7 \pm 1}{2}$

$x = 2 \vee x = -3 \vee x = -4$ soluzioni

	1	5	−2	−24
2		2	14	24
	1	7	12	0

Figura 2 – Es. pag. 710 n. 444

	1	−7	4	12
−1		−1	8	−12
	1	−8	12	0

Figura 3 – Es. pag. 710 n. 445

	2	−7	7	−2
1		2	−5	2
	2	−5	2	0

Figura 4 – Es. pag. 710 n. 446

Riferimenti bibliografici

[1] MASSIMO BERGAMINI, GRAZIELLA BAROZZI (2015). *Matematica multimediale.verde 2*, Zanichelli Editore, Bologna