Goniometria
Appunti di Matematica

Massimo Pasquetto
I.T.S. "Cangrande della Scala" – Verona

26 aprile 2020

1 Goniometria

1.1 Angoli, archi circolari e la loro misura

Richiamiamo alcuni concetti della geometria elementare. In particolare la definizione di angolo.

Due semirette aventi la stessa origine dividono il piano in due parti ciascuna delle quali si chiama angolo; l'origine comune delle due semirette si chiama vertice dell'angolo mentre le due semirette si chiamano lati dell'angolo.

- Se le due semirette giacciono sulla stessa retta e ma da parti opposte rispetto al vertice, il piano viene diviso in due semipiani, ciascuno dei quali si chiama angolo piatto.
- Se le due semirette giacciono sulla stessa retta dalla stessa parte rispetto al vertice si ottiene l'angolo nullo e l'angolo giro.
- Se le due semirette non giacciono sulla stessa retta si ottengono due angoli uno convesso e uno concavo

Si chiama arco di circonferenza la parte di circonferenza inclusa in un angolo avente il vertice nel centro della circonferenza (angolo al centro).

Per **misurare un angolo** occorre fissare l'unità di misura.

In generale, come unità di misura degli angoli, si prendono opportuni sottomultipli dell'angolo giro.

Nella pratica e nella geometria elementare si utilizza il **grado sessagesimale**, definito come la 360^a parte dell'angolo giro, oppure come la 90^a parte di un angolo retto.

I sottomultipli del grado sessagesimale sono:

(a) il **minuto primo** (abbreviato in *primo*) che corrisponde a $\dfrac{1}{60}$ di grado;
(b) il **minuto secondo** (abbreviato in *secondo*) che corrisponde a $\dfrac{1}{60}$ di primo e quindi a $\dfrac{1}{3600}$ di grado;
(c) successivamente ogni secondo si divide poi in decimi, centesimi, millesimi e così via.

In tutte le questioni di matematica superiore e di analisi matematica si utilizza come unità di misura degli angoli il **radiante**.

Il radiante (generalmente indicato rad quando necessario), è l'unità di misura dell'ampiezza degli angoli del Sistema Internazionale di unità di misura. Dato un angolo avente il vertice nel punto O, si tracci dal vertice una qualsiasi circonferenza che interseca i lati dell'angolo in due punti. La misura dell'angolo in radianti è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza compresa nell'angolo e la misura del raggio della circonferenza. Si può dimostrare che tale valore è indipendente dalla circonferenza scelta. Essendo il valore in radianti dato dal rapporto tra due grandezze omogenee, è un numero puro.

Definizione

Si chiama angolo radiante l'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al suo raggio.

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{l}{r} \tag{1}$$

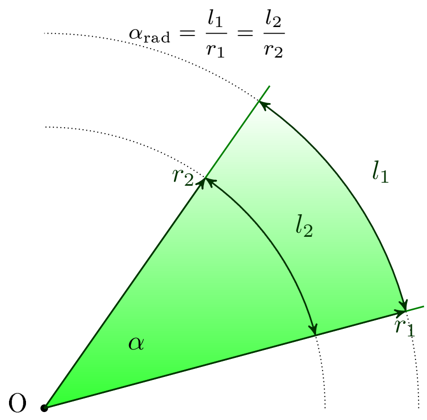


Figura 1 – Definizione di Radiante

Si può dimostrare utilizzando la geometria elementare che che se un angolo al centro di una circonferenza sottende un arco lungo quanto il raggio, allora lo stesso angolo sottende su qualsiasi altra circonferenza concentrica con la prima, un arco lungo quanto il raggio della circonferenza stessa. Perciò la definizione data di angolo radiante è indipendente dalla circonferenza considerata.

In particolare se considero due o più circonferenze concentriche e uno stesso angolo al centro si dimostra che i rapporti tra la misura degli archi che si vengono a formare e i rispettivi raggi sono costanti. Chiamiamo il rapporto tra l'arco e il raggio misura in radianti dell'angolo al centro corrispondente. Il radiante è un rapporto tra due misure e quindi è un numero puro (adimensionale).

Per passare da un sistema di misurazione all'altro, si utilizza la seguente proporzione

$$\alpha^\circ : \alpha_{\text{rad}} = 180^\circ : \pi$$

ESEMPIO

Determinare la misura in radianti dell'angolo di $5^\circ 10' 30''$.

Prima bisogna trasformare l'angolo dato con i suoi sottomultipli in gradi

$$5^\circ 10' 30'' = \left(5 + \frac{10}{60} + \frac{30}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{207}{40}\right)^\circ$$

Utilizzando ora la proporzione si ottiene

$$\alpha = \frac{207}{40} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{23}{800}\pi$$

Il radiante è un numero puro, cioè senza unità di misura, in quanto esprime il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza e il raggio della circonferenza.

Nelle questioni tecniche, legate soprattutto all'utilizzo di strumenti di misurazione, si utilizza il **grado centesimale** definito come la 400^a parte di un angolo giro oppure, in maniera del tutto equivalente, coma la 100^a parte di un angolo retto.

2 Principali funzioni goniometriche

Passiamo all'introduzione delle principali funzioni goniometriche chiamate **seno**, **coseno** e **tangente**. Ciascuna di queste funzioni associa ad un angolo un numero secondo una ben precisa definizione.

Seguendo l'impostazione specifica per i corsi dei geometri, riferiremo gli angoli ad una circonferenza goniometrica con centro nell'origine e raggio unitario e misureremo gli angoli in modo tale che il primo lato coincida con il semiasse positivo delle ordinate. Il secondo lato dell'angolo si ottiene procedendo in senso orario (verso positivo). Procedendo in senso antiorario si ottengono angoli negativi. La situazione è rappresentata in figura 2.

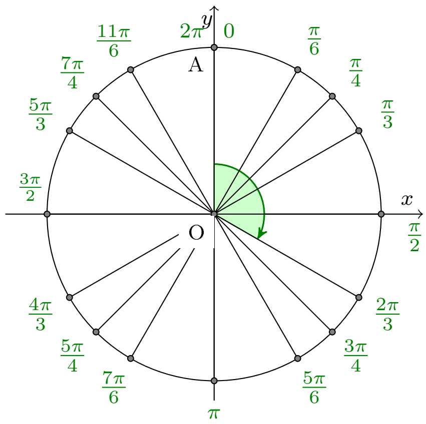


Figura 2 – Circonferenza goniometrica

Seno, Coseno e Tangente

Data una circonferenza goniometrica e un angolo orientato α avente il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ordinate, sia P il punto di intersezione del secondo lato con la circonferenza goniometrica.

Si definiscono le seguenti funzioni goniometriche:

il **seno** di α è l'ascissa di P;

il **coseno** di α è l'ordinata di P;

la **tangente** di α è il rapporto, **se esiste**, tra l'ascissa di P e la sua ordinata.

DEFINIZIONI FONDAMENTALI Le funzioni **seno** e **coseno** sono definite al variare di α e quindi al variare della posizione di P

$$\sin\alpha = x_{\mathrm{P}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = y_{\mathrm{P}}$$

Il seno e il coseno di un angolo sono numeri reali relativi (possono esssere positivi o negativi), in particolare dalla definizione si deduce che

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

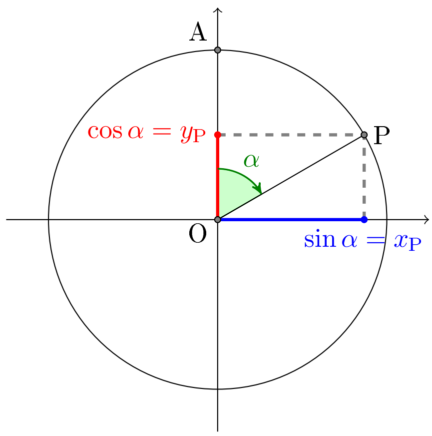


Figura 3 – Funzioni goniometriche elementari

Il seno e il coseno di un angolo α sono definiti, rispettivamente, come l'ascissa e l'ordinata del punto P associato all'angolo α. Dunque

$$\mathrm{P} = (\sin\alpha,\, \cos\alpha)$$

Poichè il punto P appartiene alla circonferenza goniometrica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ ne consegue che

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

detta prima relazione fondamentale della goniometria.

Prima relazione fondamentale

La somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo o arco è uguale all'unità

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2}$$

qualunque sia α.

Per convenzione si pone $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$ e $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$.

Fare molta attenzione che le scritture precedenti sono completamente diverse da quelle che seguono $\sin\left(\alpha^2\right) = \sin\alpha^2$ e $\cos\left(\alpha^2\right) = \cos\alpha^2$.

La tangente essendo definita come il rapporto tra l'ascissa di P e la sua ordinata, esiste solo per gli angoli che hanno l'ordinata di P diversa da 0.

$$\tan\alpha = \frac{x_\mathrm{P}}{y_\mathrm{P}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{solo se} \qquad y_\mathrm{P} = \cos\alpha \neq 0$$

Seconda relazione fondamentale

La tangente di un angolo orientato, se esiste, è data dal rapporto tra il seno dell'angolo e il suo coseno

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{3}$$

con la condizione che sia $\cos\alpha \neq 0$.

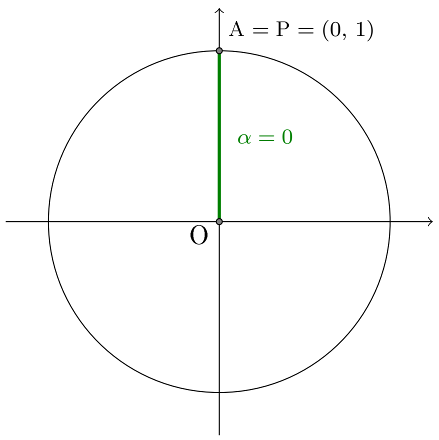


Figura 4 – Angolo nullo

ANGOLO NULLO

Se $\alpha = 0 = 0°$, allora il secondo lato dell'angolo coincide con il primo e interseca la circonferenza nel punto $\mathrm{P} = (0,\ 1)$, pertanto

- ▷ $\sin 0 = \sin 0° = 0$
- ▷ $\cos 0 = \cos 0° = 1$
- ▷ $\tan 0 = \tan 0° = \dfrac{0}{1} = 0$

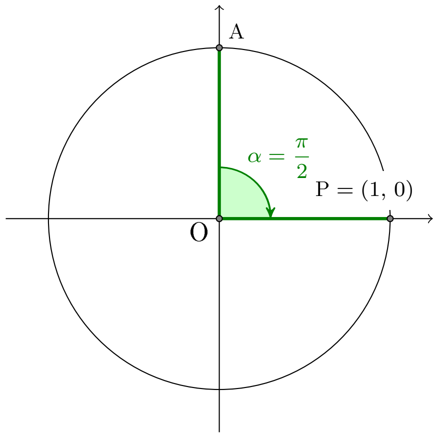


Figura 5 – Angolo retto

ANGOLO RETTO

Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2} = 90°$, allora il secondo lato dell'angolo coincide con con il semiasse positivo delle x e interseca la circonferenza nel punto $\mathrm{P} = (1,\ 0)$, pertanto

- ▷ $\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$
- ▷ $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$
- ▷ $\tan\dfrac{\pi}{2} = \tan 90° = \dfrac{1}{0} =$ NON ESISTE!

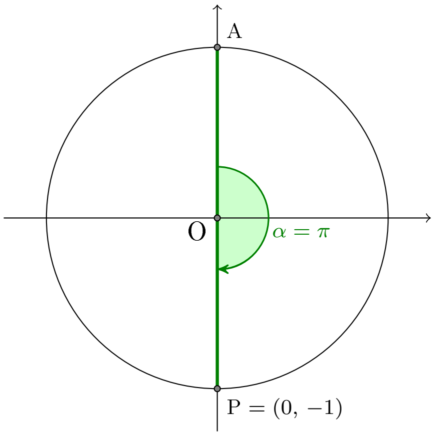


Figura 6 – Angolo piatto

ANGOLO PIATTO
Se $\alpha = \pi = 180°$, allora il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse negativo delle y e interseca la circonferenza nel punto P = (0, −1), pertanto

- ▷ $\sin\pi = \sin 180° = 0$
- ▷ $\cos\pi = \cos 180° = -1$
- ▷ $\tan\pi = \tan 180° = \dfrac{0}{-1} = 0$

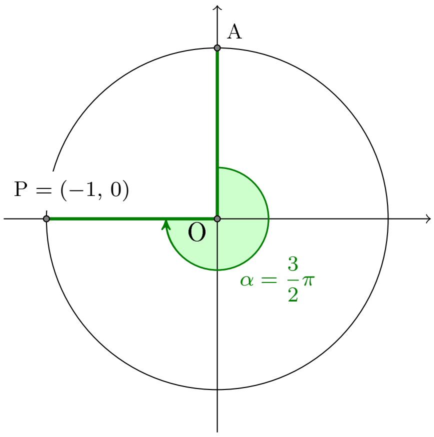


Figura 7 – Angolo di 270°

ANGOLO TRIPLO DI UN ANGOLO RETTO
Se $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi = 270°$, allora il secondo lato dell'angolo coincide con il semiasse negativo delle x e interseca la circonferenza nel punto P = (−1, 0), pertanto

- ▷ $\sin\dfrac{3}{2}\pi = \sin 270° = -1$
- ▷ $\cos\dfrac{3}{2}\pi = \cos 270° = 0$
- ▷ $\tan\dfrac{3}{2}\pi = \tan 270° = \dfrac{-1}{0} =$ NON ESISTE!

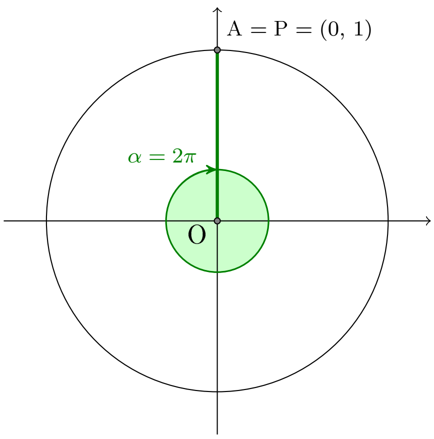


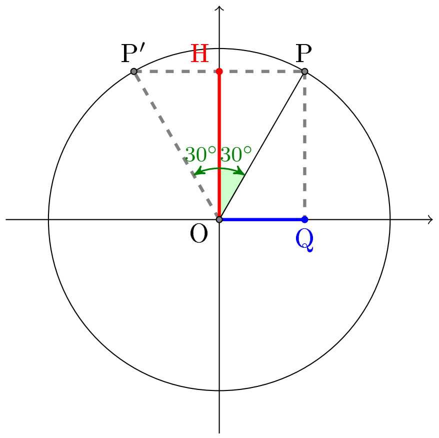
Figura 8 – Angolo giro

ANGOLO GIRO
Se $\alpha = 2\pi = 360°$, allora il secondo lato dell'angolo torna a coincidere con il primo, pur essendo un angolo diverso dal caso $\alpha = 0$ le funzioni goniometriche tornano ad assumere gli stessi valori assunti per l'angolo nullo, pertanto

- ▷ $\sin 2\pi = \sin 360° = 0$
- ▷ $\cos 2\pi = \cos 360° = 1$
- ▷ $\tan 2\pi = \tan 360° = \dfrac{0}{1} = 0$

2.1 Funzioni goniometriche di alcuni angoli o archi notevoli

Utilizzando i teoremi delle geometria elementare calcolare $\sin 30°$ e $\cos 30°$.



Il triangolo OPH è un triangolo rettangolo in H con gli angoli acuti di 30° e 60°, pertanto il triangolo OPP' è un triangolo equilatero, per cui $PP' = 1$. Possiamo ora ricavare il seno e il coseno

$$\sin 30° = OQ = HP = \frac{1}{2}$$

Utilizzando il teorema di Pitagora si ricava

$$\cos 30° = OH = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

In radianti $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La tangente si calcola come rapporto tra il seno e il coseno

$$\tan \frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Con un ragionamente perfettamente analogo al precedente si ricava che

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos \frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}, \qquad \tan \frac{\pi}{3} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

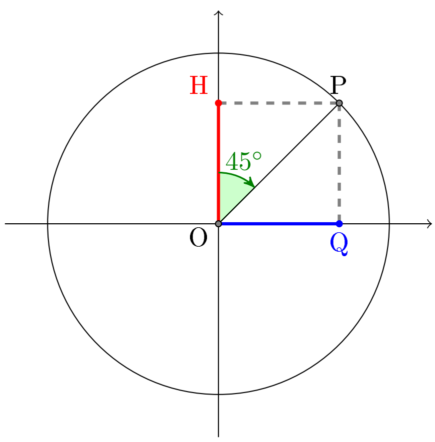
Calcolare $\sin 45°$ e $\cos 45°$, utilizzando le regole di geometria elementare relative al quadrato.

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il triangolo OPH è un triangolo rettangolo in H e isoscele perchè ha i due angoli acuti congruenti, pertanto $OH = PH$. Ponendo $OH = x$ e applicando il teorema di Pitagora, si ottiene l'equazione $x^2 + x^2 = 1$ la cui soluzione è $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Possiamo quindi affermare che $\cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e dall'uguaglianza $OQ = PH$, anche che $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \tan 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$



Possiamo riassumere in una tabella i valori notevoli delle funzioni goniometriche.

Angolo orientato		Funzione Goniometrica		
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste
$180°$	π	0	-1	0
$270°$	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	non esiste
$360°$	2π	0	1	0

Tabella 1 – Funzioni goniometriche di angoli notevoli

Utilizzando le simmetrie rispetto agli assi coordinati si possono determinare i valori del seno e del coseno anche per altri angoli notevoli multipli $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. I valori sono riassunti nella figura 9. Le coordinate in colore **blu** sono le ascisse e quindi il **seno** dell'angolo corrispondente, mentre quelle **rosse** sono le ordinate e quindi il **coseno** dell'angolo.

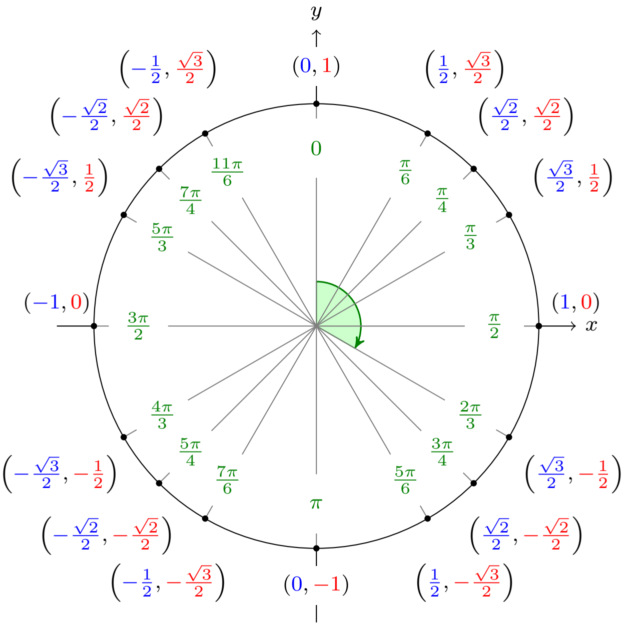


Figura 9 – Valori delle funzioni seno e coseno

2.2 Variazioni delle funzioni Seno e Coseno

A causa dell'impostazione data nella misurazione degli angoli, caratteristica dei corsi per Geometri, anche la numerazione dei quadranti è diversa rispetto all'impostazione classica, procedendo in senso orario.

Il seno e il coseno di un angolo orientato sono sempre numeri compresi fra -1 e 1, estremi inclusi.

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1 \qquad\qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

(a) Il **seno** di un angolo orientato è **positivo** se il secondo lato dell'angolo cade nel I o II quadrante; il seno è **negativo** se il lato cade nel III o IV quadrante.

(b) Il **coseno** di un angolo orientato è **positivo** se il secondo lato dell'angolo cade nel I o IV quadrante; è **negativo** se il lato è nel II o III quadrante.

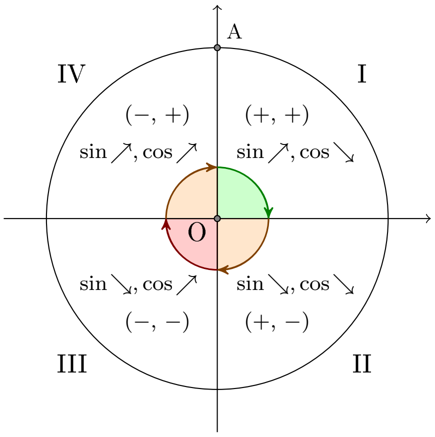


Figura 10 – Variazioni delle funzioni Seno e Coseno

(c) Nel I quadrante, quando α varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$:
il **seno** assume in ordine **crescente** tutti i numeri da 0 a 1;
il **coseno** assume in ordine **decrescente** tutti i numeri da 1 a 0.

(d) Nel II quadrante, quando α varia da $\frac{\pi}{2}$ a π:
il **seno** assume in ordine **decrescente** tutti i numeri da 1 a 0;
il **coseno** assume in ordine **decrescente** tutti i numeri da 0 a −1.

(e) Nel III quadrante, quando α varia da π a $\frac{3}{2}\pi$:
il **seno** assume in ordine **decrescente** tutti i numeri da 0 a −1;
il **coseno** assume in ordine **crescente** tutti i numeri da −1 a 0.

(f) Nel IV quadrante, quando α varia da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π:
il **seno** assume in ordine **crescente** tutti i numeri da −1 a 0;
il **coseno** assume in ordine **crescente** tutti i numeri da 0 a 1.

2.3 Interpretazione geometrica della tangente

DEFINIZIONE

Si chiama tangente di un angolo (o arco) orientato α, e si scrive $\tan\alpha$, il rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo (o arco)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

La tangente di un angolo non esiste nel caso in cui il coseno sia uguale a 0, ad esempio quando α è $\pm 90°$ oppure $\pm 270°$, perchè la divisione perde di significato.

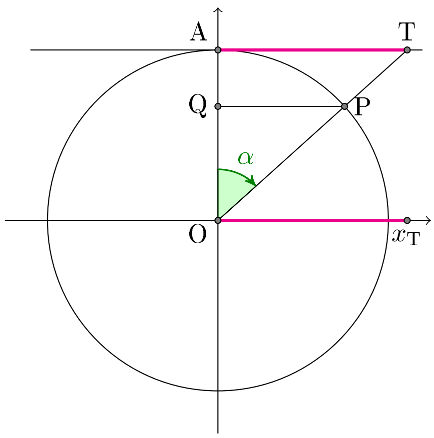
Si consideri la retta tangente alla circonferenza nel punto A e l'angolo α il cui lato interseca la circonferenza in P e la tangente in T. Considerando i due triangoli simili OPQ e OTA si ha

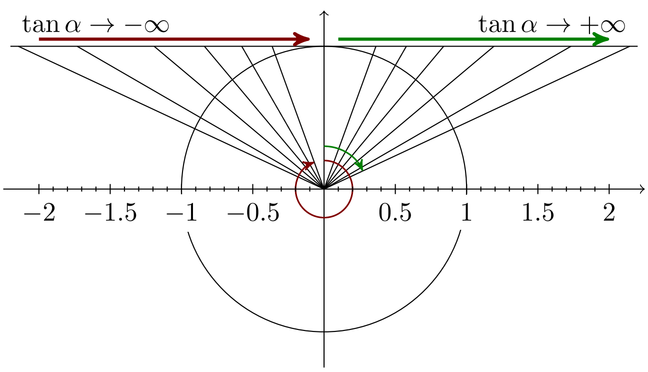
$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}}$$

essendo $\mathrm{OA} = 1$ e $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ si deduce

$$\tan\alpha = \mathrm{AT}$$

Possiamo concludere che la $\tan\alpha$ è uguale all'ascissa del punto T.



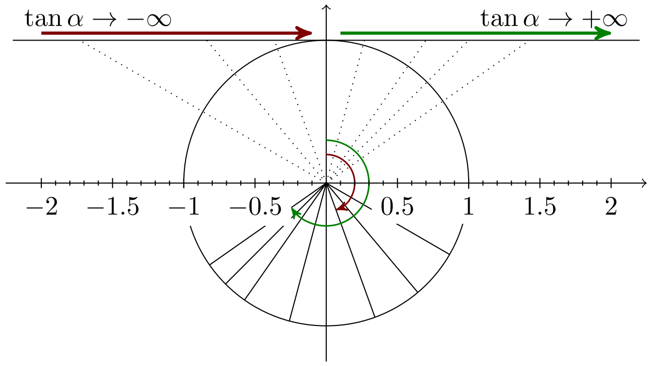


(a) Se l'angolo è $\frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi$ la tangente non esiste.

(b) Se l'angolo è 0 oppure π la tangente vale 0.

(c) Se la misura dell'angolo cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, il valore della tangente cresce mantenendosi sempre positivo. Si dice che la tangente tende a $+\infty$.

(d) Se la misura dell'angolo cresce da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π, il valore della tangente cresce, passando da $-\infty$ a 0.



(e) Se la misura dell'angolo cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π, allora la tangente cresce mantenendosi sempre negativa. Si dice che la tangente tende a $-\infty$.

(f) Se l'angolo cresce da π a $\frac{3}{2}\pi$ la tangente è positiva, il suo valore cresce. Si dice che la tangente tende a $+\infty$.

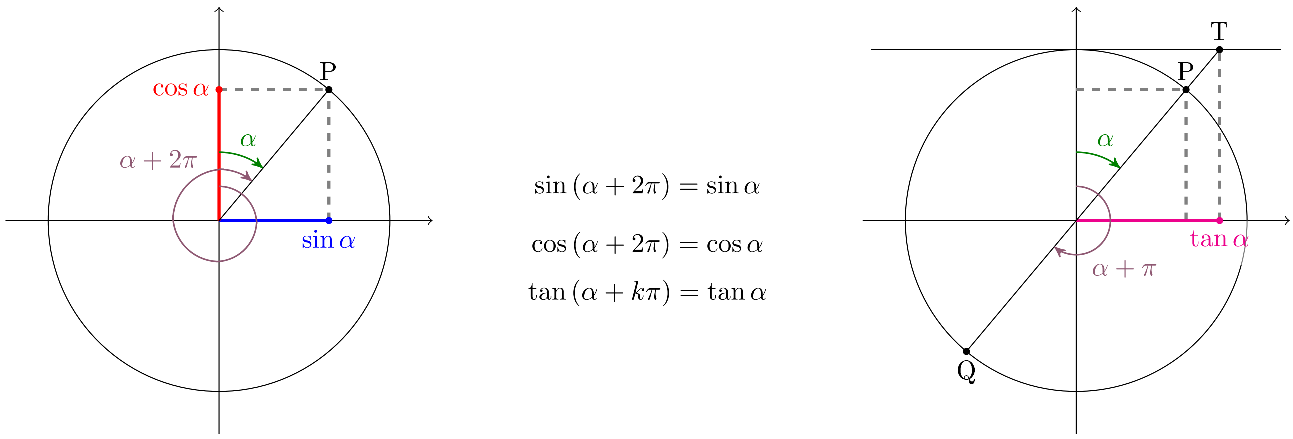


Figura 11 – Periodicità delle funzioni goniometriche

2.4 Le relazioni tra seno, coseno e tangente

Relazione fondamentale della goniometria

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

e

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Possiamo utilizzare la relazione fondamentale della goniometria per ricavare il coseno di un angolo, noto il suo seno e il quadrante a cui appartiene, infatti dalla relazione fondamentale si deduce che $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ e quindi

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \tag{4}$$

dove il segno del radicale deve essere determinato in base al quadrante di appartenenza dell'angolo.

Analogamente si dimostra che

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \tag{5}$$

2.5 Grafico delle funzioni seno e coseno

Iniziamo per comodità dalla rappresentazione grafica della funzione

$$y = \cos(x) \tag{6}$$

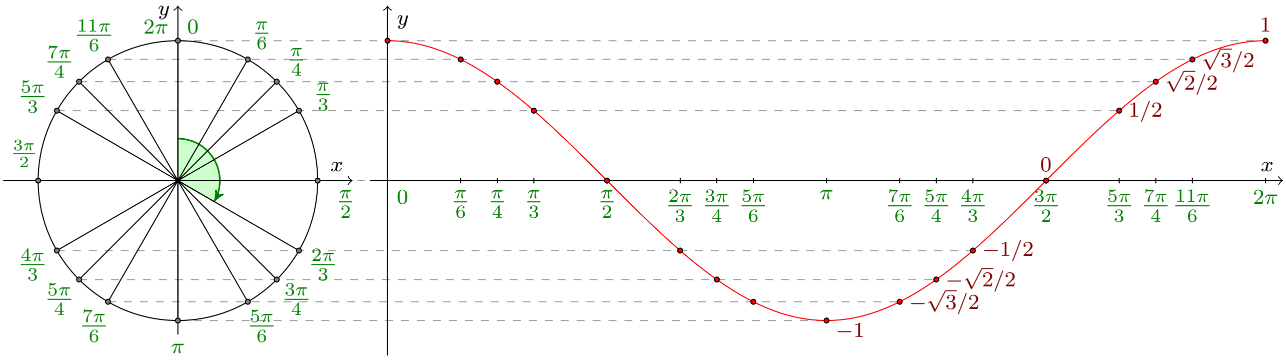


Figura 12 – Grafico della funzione coseno

Il grafico del coseno si ottiene indicando sull'asse delle ascisse (asse x) il valore dell'angolo misurato in radianti e sull'asse delle ordinate (asse y) il valore del coseno nell'angolo considerato. Per esempio poichè abbiamo visto che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, segniamo nel piano cartesiano il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{3},\, \frac{1}{2}\right)$.

Nella figura 12 il grafico del coseno è stato ottenuto riportando il valore degli angoli sull'asse delle ascisse e il valore del coseno, che è l'ordinata del punto sulla circonferenza goniometrica, in ordinata nel piano cartesiano a destra.

Quello rappresentato è il grafico della funzione coseno in un intervallo chiuso $[0,\, 2\pi]$, il grafico comunque si può estendere su tutta la retta reale.

Il grafico della funzione

$$y = \sin(x) \tag{7}$$

si ottiene ponendo sull'asse delle ascisse il valore dell'angolo misurato in radianti e sull'asse delle ordinate il valore del seno nell'angolo considerato, cioè la x del punto individuato dall'angolo sulla circonferenza goniometrica. Per esempio poichè abbiamo visto che $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, segniamo nel piano cartesiano il punto di coordinate $\left(\frac{\pi}{6},\, \frac{1}{2}\right)$.

Nella figura 13 il grafico del seno è stato ottenuto riportando il valore degli angoli sull'asse delle ascisse e il valore del seno, che è l'ascissa del punto sulla circonferenza goniometrica, in ordinata. Prestare molta attenzione che nella rappresentazione grafica della funzione seno la **circonferenza goniometrica** è rappresentata **ruotata** di 90° in senso antiorario, comunque il seno è sempre la x del punto sulla circonferenza goniometrica e la misurazione degli angoli è sempre in senso orario.

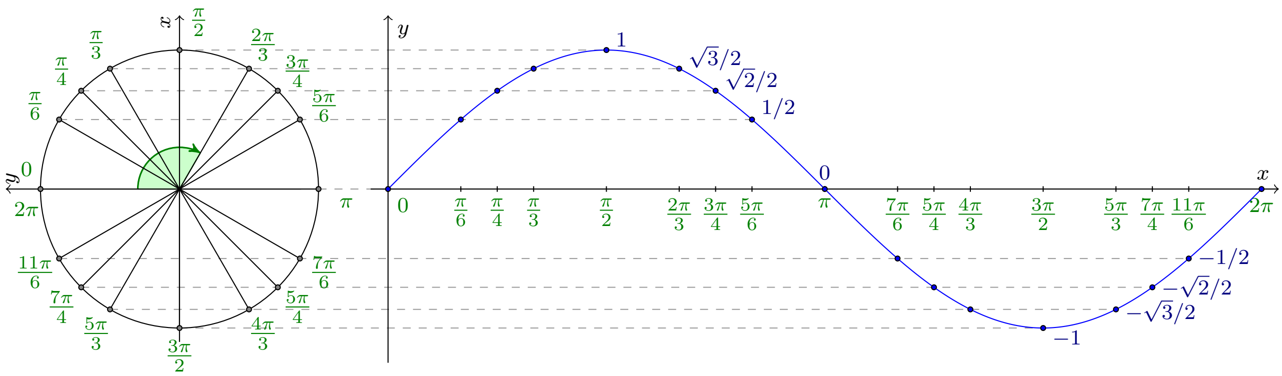


Figura 13 – Grafico della funzione seno

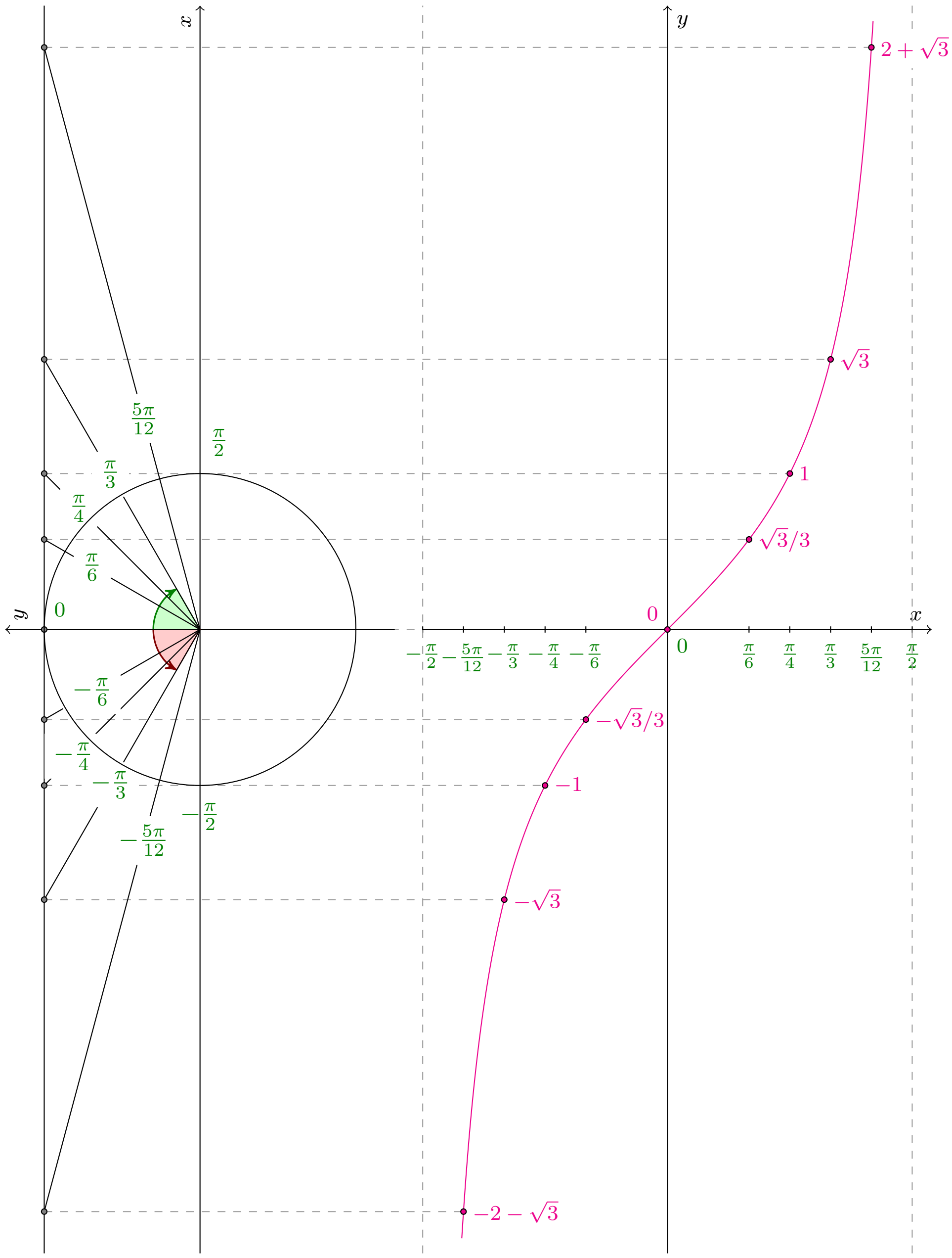


Figura 14 – Grafico della funzione tangente

Riferimenti bibliografici

[1] MASSIMO BERGAMINI, GRAZIELLA BAROZZI, ANNA TRIFONE (2016). *Matematica.verde 3G*, Zanichelli Editore, Bologna

[2] GIUSEPPE ZWIRNER (1982). *Elementi di trigonometria piana*, CEDAM Editore, Padova