Postulati e Definizioni di Geometria Piana

– Appunti di Matematica –

MASSIMO PASQUETTO

ISTITUTO TECNICO STATALE “CANGRANDE DELLA SCALA” – VERONA

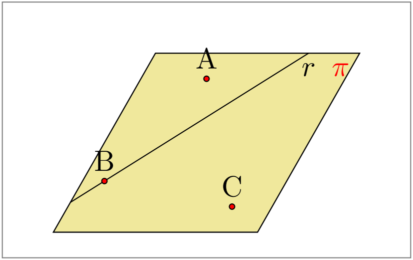
17 gennaio 2021

Geometria Euclidea

i protagonisti della geometria

ENTI PRIMITIVI

Il punto, la retta e il piano sono enti primitivi



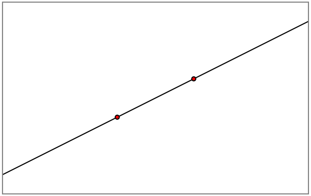
Nella figura sono rappresentati un piano π, una retta r e tre punti $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$

Geometria Euclidea

i protagonisti della geometria

POSTULATI

Sono affermazioni vere che descrivono le proprietà degli enti primitivi

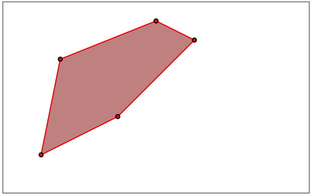


Esempio: due punti distinti appartengono ad una ed una sola retta

Geometria Euclidea

i nuovi protagonisti

A partire dagli enti primitivi si possono definire altri oggetti della geometria
Una **figura geometrica** è un insieme di punti



Geometria Euclidea

metodo ipotetico-deduttivo

Se vale $\mathbf{I}$ e dimostriamo che $\mathbf{I}$ implica $\mathbf{T}$ allora vale anche $\mathbf{T}$

$$\frac{\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{T}}{\mathbf{T}}$$

$\mathbf{I}$	IPOTESI
$\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{T}$	DIMOSTRAZIONE – TEOREMA
$\mathbf{T}$	TESI

Geometria Euclidea

il gioco della geometria

La Geometria Euclidea è come un gioco, per esempio il

Gioco degli scacchi

Enti primitivi	gli elementi del gioco, scacchiera, 16 pezzi bianche e 16 neri (Re, Regina, Alfieri, Cavalli, Torri, Pedoni)
Postulati	le regole del gioco, il Re muove di una sola casella in qualsiasi direzione, ...
Figure	le diverse "aperture" dalle quali si può iniziare il gioco, esempio "Gambetto di donna", "Difesa est indiana", ...
Dimostrazioni	sono le partite che si possono giocare

Geometria Euclidea

i postulati

Le regole della geometria

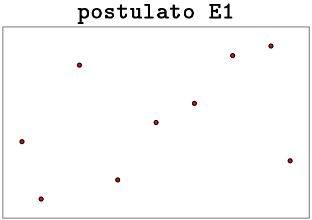
Postulati di esistenza	E1, E2
Postulati di appartenenza	A1, A2, A3, A4
Postulati di congruenza	C1, C2, C3
Postulati dell'ordine	O1, O2, O3
Postulato delle parallele	P

ATTENZIONE!

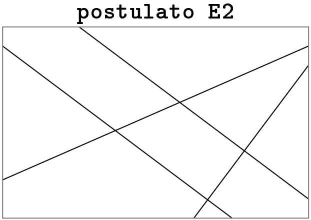
I postulati devono essere IMPARATI A MEMORIA, tutto il resto si ricava dal RAGIONAMENTO

Postulati di esistenza

definiscono l'esistenza degli enti geometrici



E1: nel piano esistono infiniti punti



E2: nel piano esistono infinite rette

Postulati di appartenenza

definiscono i legami fra gli enti geometrici

A1: un punto appartiene a infinite rette
(*per un punto passano infinite rette*)

A2: due punti distinti appartengono ad una sola retta
(*per due punti distinti passa una sola retta*)

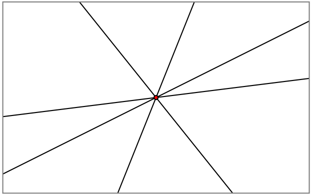
A3: considerata una retta su un piano, c'è almeno un punto del piano che non appartiene alla retta

A4: ogni retta del piano divide il piano stesso in due semipiani in modo tale che presi due punti qualsiasi nello stesso semipiano il segmento che li unisce non interseca la retta, mentre se si prendono i due punti in semipiani opposti il segmento che li unisce taglia la retta

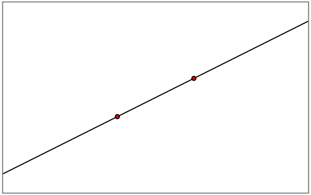
Postulati di appartenenza

definiscono i legami fra gli enti geometrici

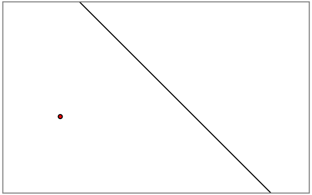
postulato A1



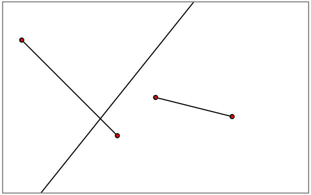
postulato A2



postulato A3

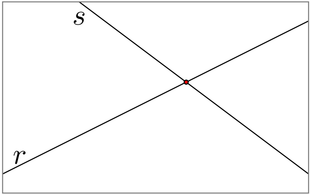


postulato A4



Dimostrare il seguente teorema

Due rette distinte possono avere al più un punto in comune



Ipotesi: $r \neq s$

Tesi: r e s hanno massimo un punto di intersezione

Dimostrazione

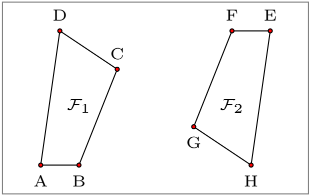
Per il postulato A2 non esistono due rette distinte a cui appartengono gli stessi due punti, pertanto due rette o non hanno punti in comune oppure hanno un solo punto in comune. $\square$

Due rette aventi un punto in comune si dicono incidenti.
Due rette non aventi alcun punto in comune si dicono parallele.

Postulati di congruenza

definiscono quando due figure sono congruenti

Due figure $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ si dicono **congruenti** se possono essere sovrapposte punto per punto con un movimento rigido. Per indicare la congruenza utilizziamo il simbolo $\cong$



$$\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2 \qquad \text{oppure} \qquad ABCD \cong EFGH$$

Postulati di congruenza

definiscono quando due figure sono congruenti

Due figure $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ si dicono **congruenti** se possono essere sovrapposte punto per punto con un movimento rigido. Per indicare la congruenza utilizziamo il simbolo $\cong$

C1: proprietà riflessiva

$$\forall \mathcal{F} \colon \mathcal{F} \cong \mathcal{F}$$

C2: proprietà simmetrica

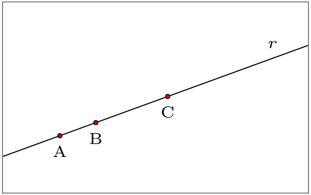
$$\forall \mathcal{F}, \mathcal{G} \colon \text{se } \mathcal{F} \cong \mathcal{G} \text{ allora } \mathcal{G} \cong \mathcal{F}$$

C3: proprietà transitiva

$$\forall \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \colon \text{se } \mathcal{F} \cong \mathcal{G} \wedge \mathcal{G} \cong \mathcal{H} \text{ allora } \mathcal{F} \cong \mathcal{H}$$

Postulati dell'ordine

definiscono un ordinamento tra punti



O1: data una retta è possibile definire una relazione d'ordine totale per i punti della retta

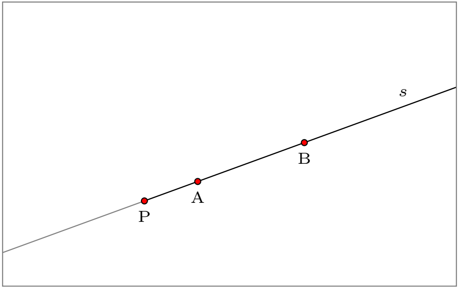
O2: ogni retta è illimitata e vi sono infiniti punti appartenenti alla retta

O3: la retta è un insieme denso di punti cioè tra due punti qualsiasi di una retta c'è sempre un altro punto che segue il primo e precede il secondo

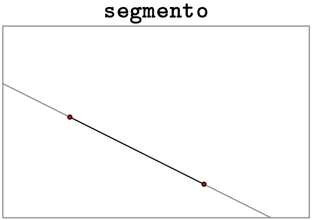
Semiretta

DEFINIZIONE SEMIRETTA DI ORIGINE P

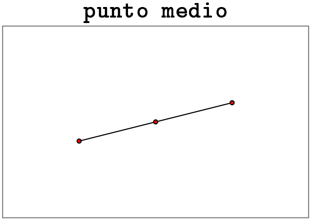
Su una retta orientata considerare un punto P. Si chiama semiretta di origine P l'insieme del punto P e di tutti i punti che lo seguono. Il punto P divide la retta in due semirette formate dal punto P e dai punti che precedeno o seguono P.



Segmento



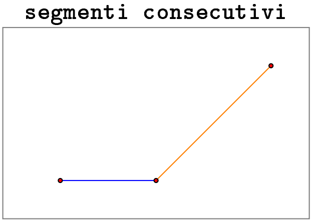
Il **segmento** è la parte di retta compresa tra due suoi punti detti estremi

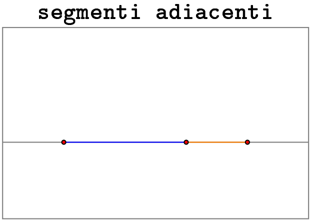


Il **punto medio** di un segmento è quel punto che divide il segmento in due parti congruenti.

Il punto medio di un segmento è unico.

Segmento





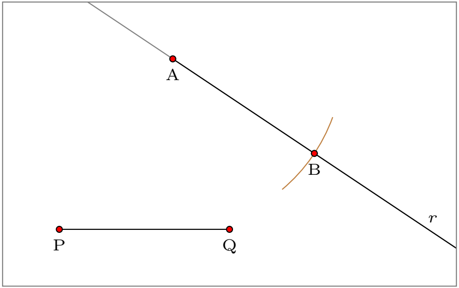
Due segmenti si dicono **consecutivi** se hanno un estremo in comune.

Due segmenti si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e giacciono sulla stessa retta

Postulato del trasporto di un segmento

Operazioni tra segmenti

TS: dati un segmento PQ e una semiretta r di origine A, sulla semiretta r **esiste ed è unico** il punto B tale che $\mathrm{AB} \cong \mathrm{PQ}$



Costruzione: il punto B si ottiene puntando il compasso in A con apertura PQ e tracciando l'arco di circonferenza che interseca la semiretta in B.

Postulato del trasporto di un segmento

Operazioni tra segmenti

1: somme di segmenti congruenti sono congruenti
se $\mathrm{AB} \cong \mathrm{PQ} \wedge \mathrm{CD} \cong \mathrm{RS}$ **allora** $\mathrm{AB} + \mathrm{CD} \cong \mathrm{PQ} + \mathrm{RS}$

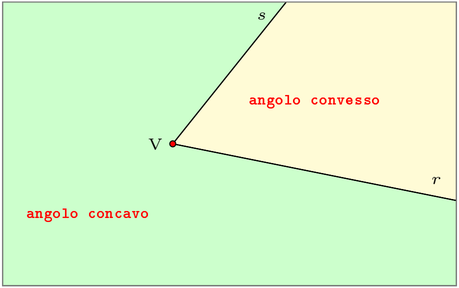
2: differenze di segmenti congruenti sono congruenti
se $\mathrm{AB} \cong \mathrm{PQ} \wedge \mathrm{CD} \cong \mathrm{RS}$ **allora** $\mathrm{AB} - \mathrm{CD} \cong \mathrm{PQ} - \mathrm{RS}$

3: la metà di segmenti congruenti sono congruenti
se $\mathrm{AB} \cong \mathrm{PQ} \wedge \mathrm{AM} \cong \mathrm{BM} \wedge \mathrm{PN} \cong \mathrm{QN}$ **allora** $\mathrm{AM} \cong \mathrm{PM}$

Definizione di angolo

Due semirette r e s aventi la stessa origine O dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali si chiama **angolo**
In particolare:

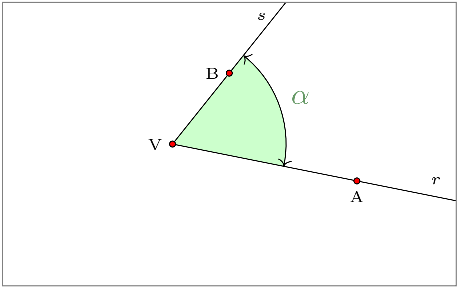
- l'origine comune delle due semirette si chiama **vertice** dell'angolo;
- le due semirette r e s si chiamano **lati** dell'angolo



Definizione di angolo

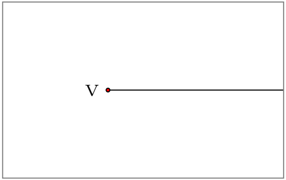
Possiamo indicare l'angolo in diversi modi

$$\angle \mathrm{AVB} \quad \text{oppure} \quad \alpha \quad \text{oppure} \quad \mathrm{A\widehat{V}B} \quad \text{oppure} \quad \angle r\mathrm{V}s$$

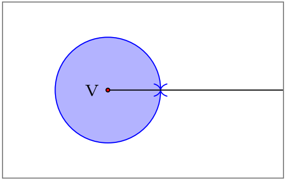


Angoli particolari

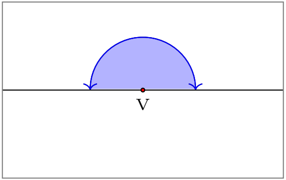
angolo nullo



angolo giro



angolo piatto



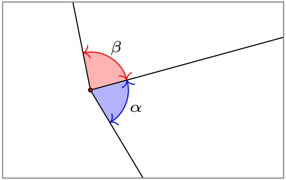
se i due lati dell'angolo coincidono in una sola semiretta, si chiama **angolo nullo** l'angolo formato solo dai punti delle due semirette

se i due lati dell'angolo coincidono in una sola semiretta, si chiama **angolo giro** l'angolo formato da tutti i punti del piano

si chiama **angolo piatto** ciascuno dei due angoli che si ottengono se i lati sono due semirette opposte che giacciono sulla stessa retta

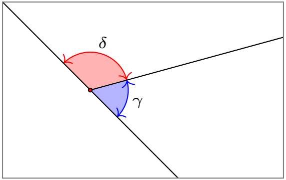
Angoli particolari

angoli consecutivi



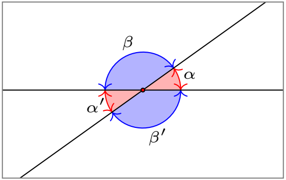
due angoli si dicono **consecutivi** se hanno in comune solo il vertice e uno dei lati; gli angoli α e β sono angoli consecutivi

angoli adiacenti



due angoli si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non in comune sono semirette opposte; gli angoli γ e δ sono angoli adiacenti

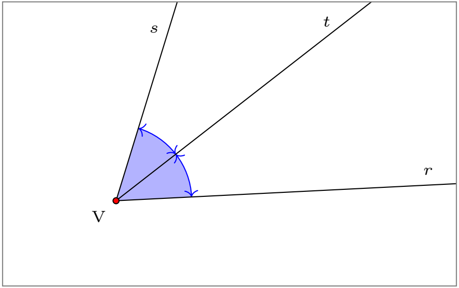
opposti al vertice



due angoli si dicono **opposti al vertice** se i prolungamenti dei lati di uno degli angoli sono i lati dell'altro angolo; gli angoli α e α' sono opposti al vertice

Confronto e operazioni tra angoli

Somme e differenze di angoli congruenti sono congruenti. La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che lo divide in due angoli congruenti.

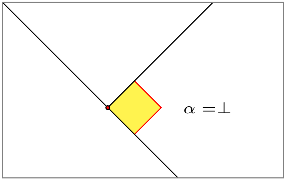


Dato un angolo qualsiasi, **esiste** ed è **unica** la sua bisettrice

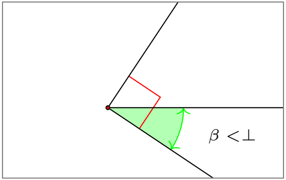
$$\angle r\mathrm{V}t \cong \angle t\mathrm{V}s, \quad \angle r\mathrm{V}t \cong \frac{1}{2}\angle r\mathrm{V}s, \quad \angle r\mathrm{V}s \cong 2 \cdot \angle r\mathrm{V}t$$

Confronto e operazioni tra angoli

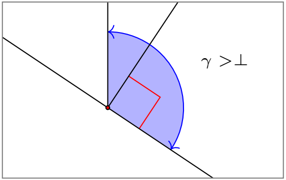
angolo retto



angolo acuto



angolo ottuso



si chiama **angolo retto** la metà di un angolo piatto

$$\alpha = \perp$$

l'angolo retto si ottiene tracciando la bisettrice di un angolo piatto

un angolo si dice **acuto** se è minore di un angolo retto

$$\beta < \perp$$

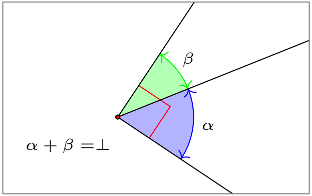
un angolo convesso si dice **ottuso** se è maggiore di un angolo retto

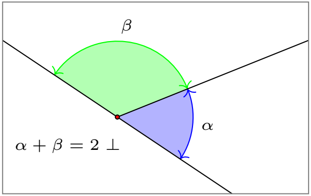
$$\gamma > \perp$$

si osservi che l'angolo ottuso è minore di un angolo piatto

$$\perp < \gamma < 2 \perp$$

Confronto e operazioni tra angoli



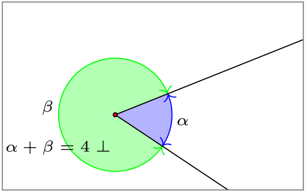


Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è un angolo retto. $\alpha + \beta = \perp$

Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto. $\alpha + \beta = 2\perp$

Confronto e operazioni tra angoli

angoli esplementari



Due angoli si dicono **esplementari** se la loro somma è un angolo giro. $\alpha + \beta = 4 \perp$

Confronto e operazioni tra angoli

Si possono dimostrare i seguenti teoremi.

TEOREMI SUGLI ANGOLI

Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti.

Angoli complementari di angoli congruenti sono congruenti.

Angoli opposti al vertice sono congruenti.

Per esempio se

$$\alpha + \beta = \perp \quad \wedge \quad \gamma + \delta = \perp \quad \wedge \quad \beta \cong \delta$$

allora

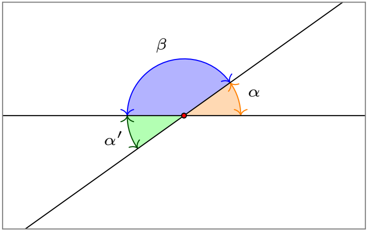
$$\alpha \cong \gamma$$

Confronto e operazioni tra angoli

TEOREMA DEGLI ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

Gli angoli opposti al vertice sono congruenti.

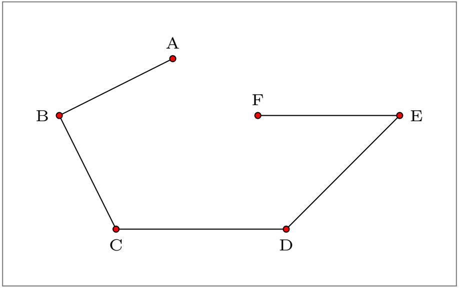
Indichiamo con π un angolo piatto.



Poiché $\alpha + \beta \cong \pi \quad \wedge \quad \alpha' + \beta \cong \pi$, α e α' sono supplementari dello stesso angolo β e quindi sono congruenti.

Linee poligonali

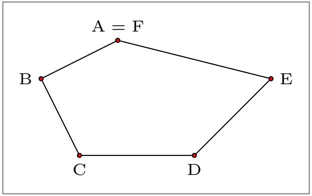
Una **poligonale** è una linea formata da segmenti a due a due consecutivi e non adiacenti.



I segmenti AB, BC, $\ldots$, si chiamano **lati** e i punti A, B, C, $\ldots$, **vertici**. Il primo vertice A e l'ultimo E sono chiamati estremi della poligonale. Se gli estremi sono diversi la poligonale si dice **aperta**.

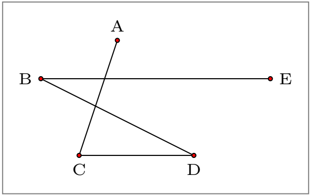
Linee poligonali

poligonale chiusa



Se gli estremi della poligonale coincidono si dice che la poligonale è **chiusa**.

poligonale intrecciata



Quando due lati non consecutivi hanno un punto in comune la poligonale si dice **intrecciata**.

Figure convesse, figure concave

figura convessa

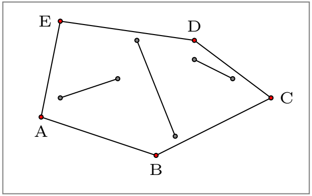
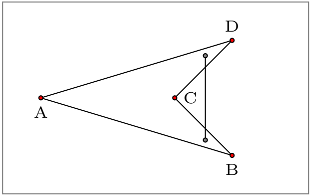


figura concava

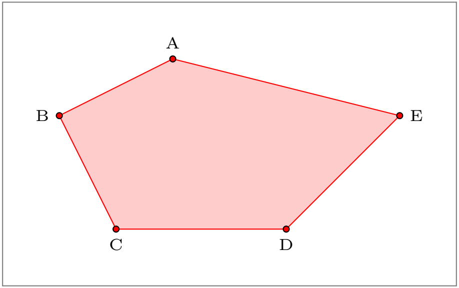


Una figura si dice **convessa** se per ogni coppia di suoi punti il segmento che li congiunge è contenuto nella figura

Una figura si dice **concava** se esistono almeno due suoi punti per i quali il segmento che li congiunge non è completamente contenuto nella figura

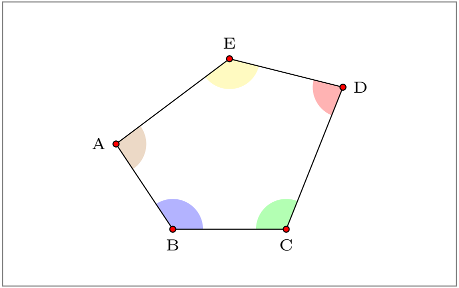
Linee e poligoni

Un **poligono** è l'insieme dei punti di una poligonale chiusa e non intrecciata e di tutti i suoi punti interni.



Un poligono può essere concavo o convesso. Se non specificato diversamente si intende il poligono convesso.

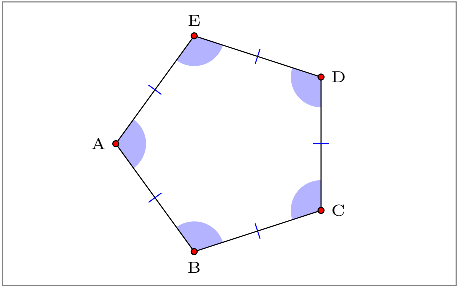
Linee e poligoni



Gli angoli convessi formati da due lati consecutivi si chiamano **angoli del poligono** o **angoli interni**.

Linee e poligoni

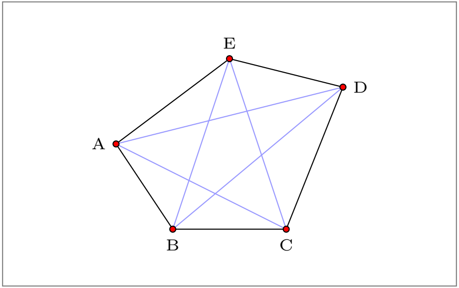
Un poligono con tutti i lati congruenti si dice **equilatero**. Se il poligono ha tutti gli angoli congruenti si dice **equiangolo**.



Un poligono si dice **poligono regolare** se è equilatero e equiangolo.

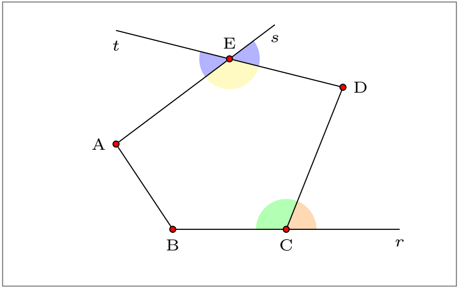
Linee e poligoni

I segmenti che hanno per estremi due vertici del poligono che non appartengono allo stesso lato si chiamano **diagonali**.



Linee e poligoni

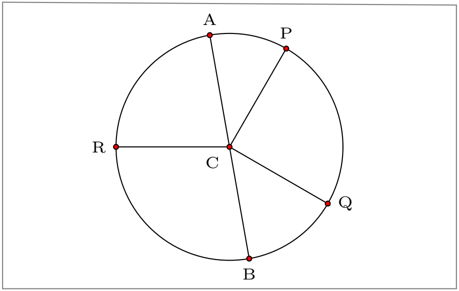
Gli angoli adiacenti agli angoli interni sono gli **angoli esterni**.



A ciascun angolo interno corrispondono due angoli esterni congruenti perché opposti al vertice.

Linee chiuse

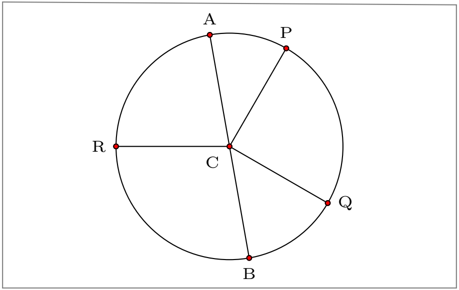
Dati un punto C, detto **centro** e un punto A nel piano, si chiama **circonferenza** l'insieme di tutti i punti del piano che formano con C un segmento congruente a CA.



$$\mathrm{CP} \cong \mathrm{CQ} \cong \mathrm{CR} \cong \mathrm{CB} \cong \mathrm{CA}$$

Linee chiuse

Tutti i segmenti aventi per estremi il centro C e un punto della circonferenza si chiamano **raggi**.
Due raggi distinti e adiacenti formano un unico segmento che si chiama **diametro**. AB è un diametro.



$$\mathrm{AB} \cong 2\mathrm{CP} \cong 2\mathrm{CQ} \cong 2\mathrm{CR} \cong 2\mathrm{CA} \cong 2\mathrm{CB}$$

Segmenti (pag. G28 n. 80)

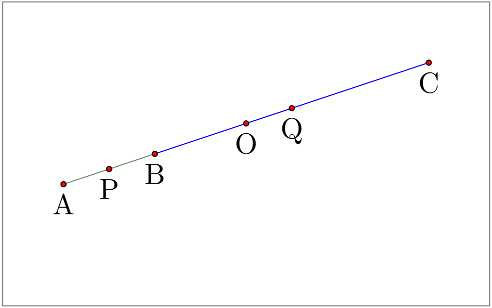
Detti P e Q i punti medi, rispettivamente, dei segmenti adiacenti AB e BC, e detto O il punto medio del segmento AC, dimostra che $\mathrm{PO} \cong \mathrm{QC}$.

IPOTESI

1. AB, BC adiacenti
2. $\mathrm{AP} \cong \mathrm{PB}$, $\mathrm{P} \in \mathrm{AB}$
3. $\mathrm{BQ} \cong \mathrm{QC}$, $\mathrm{Q} \in \mathrm{BC}$
4. $\mathrm{AO} \cong \mathrm{OC}$, $\mathrm{O} \in \mathrm{AC}$

TESI

$\mathrm{PO} \cong \mathrm{QC}$



rappresentazione grafica

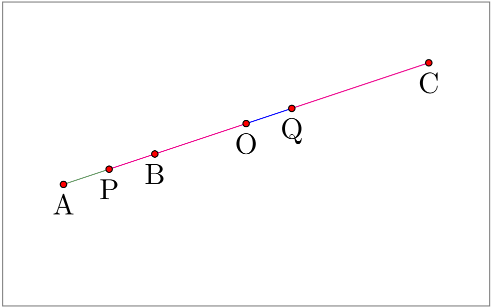
Segmenti (pag. G28 n. 80)

IPOTESI

1. AB, BC adiacenti
2. $AP \cong PB$, $P \in AB$
3. $BQ \cong QC$, $Q \in BC$
4. $AO \cong OC$, $O \in AC$

TESI

$PO \cong QC$



rappresentazione grafica

DIMOSTRAZIONE

$$PO \cong AO - AP \cong \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AB \cong \frac{1}{2}(AC - AB) \cong \frac{1}{2}BC \cong QC$$

$\square$

Segmenti (pag. G28 n. 81)

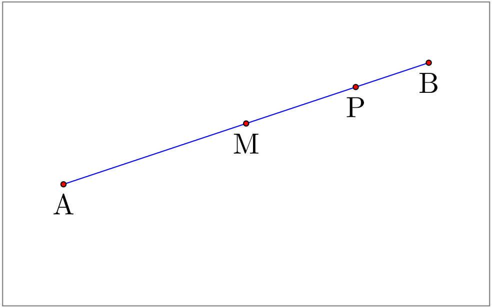
Considera su una retta orientata il segmento AB e sia P un punto interno ad AB, più vicino a B che ad A. Dimostra che il segmento che ha per estremi il punto P e il punto medio di AB è congruente alla metà della differenza $\mathrm{AP} - \mathrm{PB}$.

IPOTESI

1. $\mathrm{AM} \cong \mathrm{MB}$, $\mathrm{M} \in \mathrm{AB}$
2. $\mathrm{AP} > \mathrm{PB}$, $\mathrm{P} \in \mathrm{AB}$

TESI

$$\mathrm{MP} \cong \frac{1}{2}(\mathrm{AP} - \mathrm{PB})$$



rappresentazione grafica

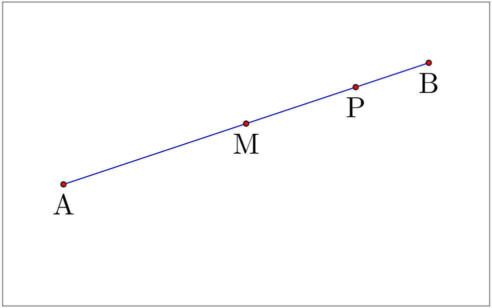
Segmenti (pag. G28 n. 81)

IPOTESI

1. $AM \cong MB,\ M \in AB$
2. $AP > PB,\ P \in AB$

TESI

$$MP \cong \frac{1}{2}(AP - PB)$$



rappresentazione grafica

DIMOSTRAZIONE

$$MP \cong MB - PB \cong \frac{1}{2}AB - PB \cong \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}PB - \frac{1}{2}PB \cong$$
$$\frac{1}{2}(AB - PB) - \frac{1}{2}PB \cong \frac{1}{2}AP - \frac{1}{2}PB \cong \frac{1}{2}(AP - PB)$$

Segmenti (pag. G28 n. 82)

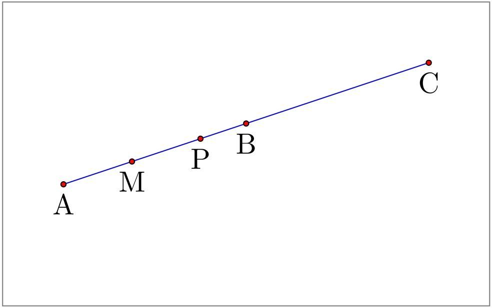
Considera due segmenti due segmenti adiacenti e congruenti AB e BC, e fissa un punto P qualunque interno al segmento AB. Detto M il punto medio del segmento AP, dimostra che $\mathrm{MB} \cong \dfrac{1}{2}(\mathrm{AC} - \mathrm{AP})$.

IPOTESI

1. $\mathrm{AB} \cong \mathrm{BC}$ e adiacenti
2. $\mathrm{P} \in \mathrm{AB}$
3. $\mathrm{AM} \cong \mathrm{MP}$ e $\mathrm{P} \in \mathrm{AP}$

TESI

$\mathrm{MB} \cong \dfrac{1}{2}(\mathrm{AC} - \mathrm{AP})$



rappresentazione grafica

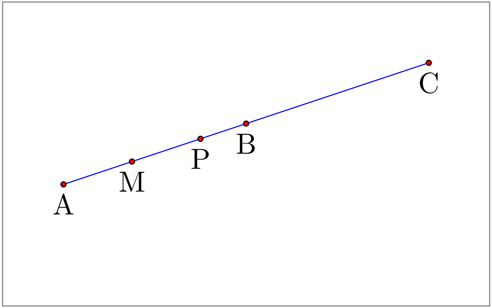
Segmenti (pag. G28 n. 82)

IPOTESI

1. $AB \cong BC$ e adiacenti
2. $P \in AB$
3. $AM \cong MP$ e $P \in AP$

TESI

$MB \cong \frac{1}{2}(AC - AP)$



rappresentazione grafica

DIMOSTRAZIONE

$$MB \cong AB - AM \cong \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AP \cong \frac{1}{2}(AC - AP)$$

Segmenti (pag. G28 n. 83)

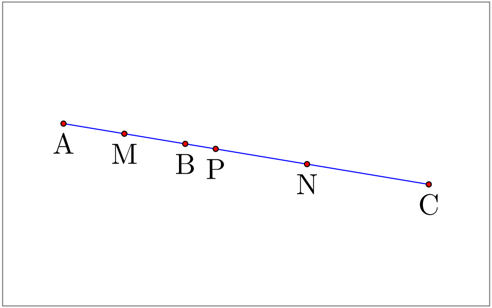
Sulla retta r disegna nell'ordine tre punti A, B C tali che $\mathrm{BC} \cong 2\mathrm{AB}$. Siano M e N i punti medi rispettivamente dei segmenti AB e BC, e sia P il punto medio del segmento MN. Dimostra che $\mathrm{AC} \cong 4\mathrm{MP}$.

IPOTESI

1. $\mathrm{BC} \cong 2\mathrm{AB}$ e adiacenti
2. $\mathrm{AM} \cong \mathrm{MB}$ e $\mathrm{M} \in \mathrm{AB}$
3. $\mathrm{BN} \cong \mathrm{NC}$ e $\mathrm{N} \in \mathrm{BC}$
4. $\mathrm{MP} \cong \mathrm{PN}$ e $\mathrm{P} \in \mathrm{MN}$

TESI

$\mathrm{AC} \cong 4\mathrm{MP}$



rappresentazione grafica

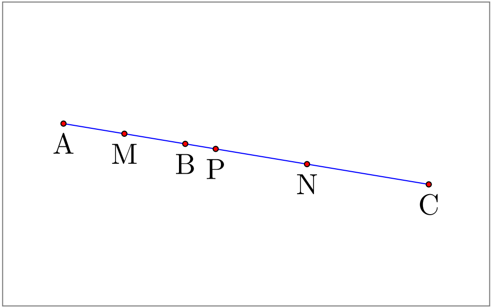
Segmenti (pag. G28 n. 83)

IPOTESI

1. $BC \cong 2AB$ e adiacenti
2. $AM \cong MB$ e $M \in AB$
3. $BN \cong NC$ e $N \in BC$
4. $MP \cong PN$ e $P \in MN$

TESI

$AC \cong 4MP$



rappresentazione grafica

DIMOSTRAZIONE

$$AC \cong AB+BC \cong 2MB+2BN \cong 2(MB+BN) \cong 2MN \cong 2(2MP) \cong 4MP$$

$\square$

Angoli (pag. G29 n. 90)

Sapendo che $\alpha \cong 2\beta$, $\beta \cong \frac{2}{5}\delta$ e $\gamma - \delta \cong \alpha$, dimostra che $\alpha + \beta + \gamma \cong 3\delta$. Verifica poi le relazioni date rappresentando graficamente la situazione descritta.

	IPOTESI	TESI
1.	$\alpha \cong 2\beta$	$\alpha + \beta + \gamma \cong 3\delta$
2.	$\beta \cong \frac{2}{5}\delta$	
3.	$\gamma - \delta \cong \alpha$	

DIMOSTRAZIONE

Da 2. si deduce che $5\beta \cong 2\delta$ e da 3. che $\gamma \cong \alpha + \delta$.
Pertanto,

$$\alpha + \beta + \gamma \cong 3\beta + \gamma \cong 3\beta + \alpha + \delta \cong 5\beta + \delta \cong 2\delta + \delta \cong 3\delta$$

□

Angoli (pag. G29 n. 90)

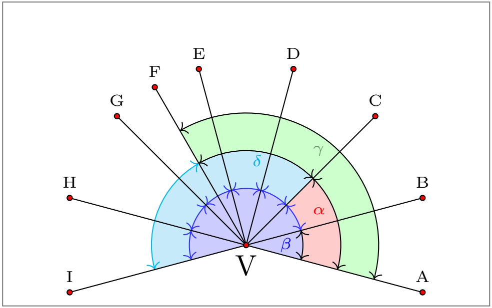
Sapendo che $\alpha \cong 2\beta$, $\beta \cong \dfrac{2}{5}\delta$ e $\gamma - \delta \cong \alpha$, dimostra che $\alpha + \beta + \gamma \cong 3\delta$. Verifica poi le relazioni date rappresentando graficamente la situazione descritta.

IPOTESI

1. $\alpha \cong 2\beta$
2. $\beta \cong \dfrac{2}{5}\delta$
3. $\gamma - \delta \cong \alpha$

TESI

$\alpha + \beta + \gamma \cong 3\delta$



rappresentazione grafica